TD 16 : Arithmétique

Divisibilité, division euclidienne

Exercice 1. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que :

1) $n-1$ divise $n+2$
2) $n-4$ divise $3n-17$
3) $n+1$ divise $2n^2-2n+4$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $1+2+\cdots+n$ par n.

Exercice 3. Déterminer tous les entiers qui divisent à la fois 318 et 282.

Exercice 4. Montrer que la somme de 5 entiers consécutifs est divisible par 5.
Est-ce que la somme de 4 entiers consécutifs est divisible par 4 ?

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$, puis dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2-y^2=5$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $3x^2+xy=11$.

Exercice 7. Calculer les PGCD des couples (a,b) suivants. Donner également un couple de coefficients de Bézout.

$$(a,b)=(69,13) \qquad (a,b)=(45,76) \qquad (a,b)=(350,14)$$

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les fractions $\dfrac{14n+3}{21n+4}$, $\dfrac{n^2+n}{2n+1}$, et $\dfrac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$ sont irréductibles.

Nombres premiers

Exercice 9 (*Calcul de PGCD et de PPCM*)**.** En utilisant la décomposition en produits de facteurs premiers, calculer :

1) $105 \wedge 147$ puis $105 \vee 147$
2) $90 \vee 120$
3) $60 \wedge 144 \wedge 84$
4) $2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6 \vee 7 \vee 8 \vee 9$
5) $96842 \wedge 75$

Exercice 10. Résoudre **A)** $\begin{cases} x \wedge y = 15 \\ xy = 900 \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}^2$ **B)** $\begin{cases} x \wedge y = 5 \\ x \vee y = 60 \end{cases}$ dans $\mathbb{Z}^2$ **C)** $\begin{cases} x \wedge y = 10 \\ x + y = 100 \end{cases}$ dans $\mathbb{N}^2$

Exercice 11 (*Comptage de diviseurs*)**.**

1) Décomposer 360 et 1750 en produit de facteurs premiers.
2) Quel est le nombre de diviseurs positifs de 360 ? de 1750 ?
3) Quel est le nombre de diviseurs positifs communs à 360 et 1750 ?

Exercice 12. Montrer que $\sqrt{2}$, $\dfrac{\ln 8}{\ln 7}$ et $\sqrt[5]{\dfrac{3}{4}}$ sont irrationnels.

Exercice 13. Déterminer le nombre de 0 apparaissant à la fin de l'écriture décimale du nombre 100!.

Exercice 14 (*Valuations*)**.** Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$.

Exercice 15. Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que $a \wedge b = 1 \iff (a+b) \wedge (ab) = 1$.

Exercice 16. Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n!+2$ et $n!+n$.

Exercice 17 ($\star$)**.** Soit $p \geq 5$ un nombre premier. Montrer que $p^2 \equiv 1 \quad [24]$.

Congruences

Exercice 18 (*Critère de divisibilité*)**.** Soit $a \in \mathbb{N}$ un entier à N chiffres. Soit $a_{N-1}a_{N-2}\cdots a_0$ son écriture en base 10.

1) Montrer que $2 \mid a$ ssi $2 \mid a_0$.
2) Montrer que $3 \mid a$ ssi $3 \mid a_0 + \cdots + a_{n-1}$.
3) Montrer que $5 \mid a$ ssi$5 \mid a_0$.
4) Montrer que $6 \mid a$ ssi $2 \mid a$ et $3 \mid a$.
5) Montrer que $9 \mid a$ ssi $9 \mid a_0 + \cdots + a_{n-1}$.
6) Mq $11 \mid a$ ssi $11 \mid a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1}$.

Exercice 19. Déterminer le dernier chiffre de 7^7.

Exercice 20. 1) Montrer que si n est un entier impair, alors le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 vaut 1.
2) Montrer que si x est un entier pair, alors $x^2 \equiv 0\,[8]$ ou $x^2 \equiv 4\,[8]$.
3) Si a, b, c sont trois entiers impairs, en déduire que $a^2+b^2+c^2$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 21. Déterminer le reste de la division euclidienne de : **A)** 5^{12} par 11 **B)** 3^{2023} par 7.

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le reste de la division euclidienne de $6^n - 1$ par 7 appartient à $\{0, 5\}$.

Exercice 23. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $6 \mid 5n^3 + n$, $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$, $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

Exercice 24 (*Équations de congruences*)**.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$a)$ $5x \equiv 3 \quad [17]$ $b)$ $10x \equiv 6 \quad [34]$ $c)$ $10x \equiv 5 \quad [34]$ $d)$ $10x \equiv 5 \quad [34]$

Exercice 25 (***Exercice banque CCP***)**.** On cherche à résoudre le système suivant, d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$(S) : \quad \begin{cases} x \equiv 6 \quad [17] \\ x \equiv 4 \quad [15] \end{cases}$$

1) Déterminer une solution particulière $x_0 \in \mathbb{Z}$. On pourra faire le lien avec une relation de Bézout.
2) Déduire les solutions de (S).

Équations diophantiennes

Exercice 26. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

$(E_1) : \quad 7x + 12y = 5$ $(E_2) : \quad 9x + 15y = 11$ $(E_3) : \quad 9x + 15y = 18$

$(E_4) : \quad 16x - 3y = 4$ $(E_5) : \quad 18x + 7y = 12$ $(E_6) : \quad 3x + 7y = 10^n \quad (n \in \mathbb{N})$